Den stora matteduellen

13 april 2018

Lag Sverige mot Brummer & Partners

1. Alla positiva reella lösningar till ekvationen $x^{x^2-3x} = x^2$ ges av

   (a) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$; (b) $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$;
   (c) ekvationen har inga positiva reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).

2. Om det reella talet a uppfyller $a = \ln(\sqrt{2}-1) - \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, så gäller att

   (a) $a < 0$; (b) $a = 0$; (c) $a > 0$; (d) det finns inget sådant reellt tal.

3. Höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel har längden 4 cm, medan de båda kateterna har längderna 3 cm och 8 cm. Då gäller att hypotenusans längd är

   (a) 6 cm; (b) 12 cm; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.

4. ”Varje gång jag har besökt USA har jag också besökt Kanada.” Av detta kan man dra slutsatsen att

   (a) Jag har varit i USA och Kanada lika många gånger.
   (b) Om jag inte har varit i Kanada så har jag heller inte varit i USA.
   (c) Om jag inte har varit i USA så har jag heller inte varit i Kanada.
   (d) Man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

5. Pythagoras sats lyder: *I en rätvinklig triangel är summan av kvadraterna på kateterna lika med kvadraten på hypotenusan.* Av Pythagoras sats följer att

   (a) Givet tre positiva tal a, b, c finns en rätvinklig triangel med just dessa tre tal som sidlängder.
   (b) En triangel med sidlängder $3, 4, 5$ är rätvinklig.
   (c) Det finns ingen rätvinklig triangel med sidlängder $5, 10, 11$.
   (d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av Pythagoras sats.

6. Givet den rätvinkliga triangeln ABC med rät vinkel vid C och sidlängder $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, låt r vara den inskrivna cirkelns radie. Då gäller att

$$\text{(a) } r = \frac{a+b-c}{2};$$
$$\text{(b) } r = \frac{c-a-b}{2};$$
$$\text{(c) } r = \frac{3a+2b-2c}{2};$$
$$\text{(d) } r = \frac{2c-a-b}{2}.$$

7. Olikheten $\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2 > 0$ har samma lösningar som olikheten

(a) $(2x-1)^2 > 0$; (b) $2x-1 \neq 0$; (c) $2x-1 > 0$; (d) inget av (a)-(c).

8. Talet p är reellt. Om ekvationen $x^2 + px + p = 0$ har två olika reella lösningar, så gäller att

(a) $p > 4$; (b) $p = 4$; (c) $p < 4$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

9. Momsen på matvaror är $12,5\%$. Om en vara av den typen kostar 100 kr inkl. moms, så är momsens andel av totalpriset

(a) $\frac{1}{8}$; (b) $\frac{1}{9}$; (c) $\frac{1}{10}$; (d) annat svar.

10. Om α och β är vinklar i en triangel och $\alpha > \beta$, så gäller

(a) $\cos\alpha > \cos\beta$; (b) $\sin\alpha > \sin\beta$;
(c) $\tan\alpha > \tan\beta$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

11. Talet a är positivt, medan b är icke-negativt. Givet att exakt ett av de fyra påståendena nedan är sant, avgör vilket och markera det

(a) $b = 0$; (b) $b > a$; (c) $b < a$; (d) $b > 0$.

12. Triangeln ABC har spetsiga vinklar vid A och B. Beteckna $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$. Punkten P ligger på sidan AB. Då gäller

$$\text{(a) } |CP|^2 = a^2 \cdot |AP| + b^2 \cdot |BP| - |AP| \cdot |BP| \cdot c;$$
$$\text{(b) } |CP|^2 = a^2 \cdot |AP| + b^2 \cdot |BP| - |AP| \cdot (c + |AP|) \cdot c;$$
$$\text{(c) } |CP|^2 = \frac{a^2}{c} \cdot |AP| + \frac{b^2}{c} \cdot (c + |AP|) - |AP| \cdot |BP|;$$
$$\text{(d) } |CP|^2 = \frac{a^2}{c} \cdot |AP| + \frac{b^2}{c} \cdot (c - |AP|) - |AP| \cdot |BP|.$$

13. Punkterna A, B, C ligger på en cirkel med medelpunkt O. Om vinkeln AOC är lika med $60°$, så är vinkeln ABC lika med

(a) $30°$; (b) $120°$; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

14. Vinklarna α, β och γ är vinklar i en triangel. Då gäller att

(a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;
(b) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
(c) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}$;
(d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

15. Om diagonalerna i en fyrhörning är vinkelräta mot varandra och är 4 längdenheter respektive 5 längdenheter långa, så är fyrhörningens area

(a) 20 a.e.; (b) 10 a.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

16. I en triangel med sidlängderna 5, 7 och 9 längdenheter är den största vinkeln

(a) spetsig; (b) rät; (c) trubbig; (d) det finns ingen sådan triangel.

17. Antalet reella lösningar till ekvationen $9^x - 6^x - 2^{2x+1} = 0$ är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

18. Om α är vinkel i en triangel och $\sin 2\alpha \leq 0$, så gäller att

(a) α är inte spetsig; (b) α är inte trubbig;
(c) kan ej avgöras; (d) det finns ingen sådan vinkel.

19. En rätvinklig triangel har omkrets 20 längdenheter och area 25 areaenheter. Hypotenusans längd är

(a) $7,5$ l.e.; (b) annat tal;
(c) kan ej avgöras; (d) det finns ingen sådan triangel.

20. Den kortaste höjden i en triangel med sidlängder $5, 12$ och 13 längdenheter har längden (i längdenheter)

(a) $\frac{30}{13}$; (b) $\frac{60}{13}$; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.